Beilage zum Programm des Kgl. Gymnasiums zu Graudenz.

Ostern 1899.

Foucaults Pendelversuch.

Von

Prof. Dr. Rehdans.

GRAUDENZ.
Druck von Gustav Röthe's Buchdruckerei.
1899.

1899. Programm No. ~~32.~~ 31

Foucaults Pendelversuch.

Erster Teil.

I. Grundriss der Experimentalphysik von E. Jochmann und O. Hermes. Berlin 1890. Seite 366. 7.

„Die Schwingungsebene eines Pendels nämlich, auf welches andere Kräfte als die Schwere nicht einwirken, muss in der That unveränderlich bleiben.“

1) Danach müsste also ein Pendel entweder stets in einer und derselben Ebene schwingen oder wenigstens in Ebenen, die parallel sind. Ein nicht schwingendes, einfaches Fadenpendel hängt scheinbar ruhig vor mir; der gespannte Faden giebt mir die Richtung der Vertikallinie des Beobachtungsortes zwischen Zenith und Nadir. Dreht sich die Erde um ihre Achse, so ändert sich fortwährend die Richtung der Vertikallinie; sie beschreibt während der Rotation der Erde den Mantel eines Kegels.

Gelingt es mir, das Pendel in scheinbar ebene Schwingungen zu versetzen, so geht das Pendel bei jeder Schwingung einmal durch die Gleichgewichtslage auf der Vertikallinie. Da sich nun von einer Schwingung zur andern die Richtung der Vertikallinie ändert, so ändert sich auch von einer Schwingung zur andern die Lage der Schwingungsebene. Die Richtungen der Vertikallinie gehen durch einen Punkt und durch denselben Punkt alle Kanten, in denen sich die verschiedenen Schwingungsebenen durchschneiden.

Auf den Polen freilich bleibt die Richtung der Vertikallinie ungeändert, und deshalb kann dort auch die Lage der Schwingungsebene unverändert bleiben. Die Vertikallinie eines Ortes des Aequators dreht sich während der Rotation der Erde in einer Ebene, in der die Gleichgewichtslage des Pendels bei allen Schwingungen liegt.

Die Schwingungsebene eines Pendels, auf das die Schwerkraft einwirkt, kann also nicht unveränderlich bleiben. In einer kurzen Zeit ist allerdings die Aenderung unbedeutend.

2) Ich halte in der erweiterten Ebene eines Meridians a über einem Globus ein ebenes Stück Papier. Ich denke mir, dass in der Ebene des Papiers ein Pendel seine erste Schwingung vollführt, und nehme an, dass die Schwingungsebene des Pendels unveränderlich bleibt. Drehe ich nun den Globus einmal ganz herum, so fällt der Meridian a wieder ganz in die Ebene des Papiers, d. h. in die unveränderliche Schwingungsebene des Pendels. Wenn also die Schwingungsebene unveränderlich bleibt und die Erde bloss um ihre Achse rotiert, so muss doch auch hier der Meridian, in welchem die erste Schwingung erfolgte, nach einer vollen Rotation der Erde mit der ersten Schwingungsebene vollständig zusammenfallen. Und doch sollen in Berlin nach einer vollen Umdrehung der Erde die beiden Ebenen, nämlich die letzte Schwingungsebene und die Meridianebene, in welcher die erste Schwingung erfolgte, einen Winkel von 285°30′ einschliessen. Diese Angabe steht mit der Annahme der Unveränderlichkeit der Schwingungsebene eines Pendels in Widerspruch und deshalb auch die Formel, nach der sie berechnet ist. Denn in Bezug auf die Angabe „285°30′“ kann sich doch wohl niemand auf eine Beobachtung am Foucaultschen Pendel berufen. Direkte Beobachtungen haben zwar ergeben, dass in Berlin zwischen der Meridian- und Schwingungsebene nach einer Stunde ein Winkel von 12° liegt; daraus allein aber kann man nicht schliessen, dass nach einer vollen Rotation der Erde dieser Winkel $24 \times 12^0 = 288^0$ betragen muss.

II. Lehrbuch der Experimentalphysik von Adolph Wüllner. Erster Band. Leipzig, 1895. § 36, Seite 161 bis 164.

Compendium der Physik von Adolph Wüllner. Erster Band. Leipzig, 1879. § 22, Seite 76 bis 78.

1) Wüllner glaubt bewiesen zu haben, dass, wenn ein schwingendes Pendel mit der rotierenden Erde von A, wo seine Schwingung in der Meridianebene erfolgte, nach einem Punkte B kommt, s t e t s die beiden, an den Schwingungsbogen in seinem tiefsten Punkte gelegten Tangenten BD und AC parallel sind. Daraufhin leitet er für den Winkel CBD $= \beta$ zwischen der angegebenen Tangente BD und der Meridiantangente BC im Punkte B die Formel $\beta = \alpha \sin \varphi$ ab, worin der $\angle \alpha =$ AMB als Centriwinkel zu dem Bogen AB des Parallelkreises M in der geogr. Breite φ gehört.

Wäre nun wirklich BD // AC und somit auch $\angle$ DBC = BAC = β, so wäre unzweifelhaft

in dem $\triangle$ ABC die Seite

$$AB = 2\ AC \sin\frac{\beta}{2} = 2\ r \operatorname{ctg}\varphi \sin\frac{\beta}{2},$$

und in dem $\triangle$ AMB dieselbe Seite

$$AB = 2\ AM \sin\frac{\alpha}{2} = 2r \cos\varphi \sin\frac{\alpha}{2},$$

also $\sin\frac{\beta}{2} = \sin\varphi \sin\frac{\alpha}{2}$.

Die von Wüllner entwickelte Formel $\beta = \alpha \sin\varphi$ könnte daher nur so lange richtig sein, als $\sin\frac{\alpha}{2} = \operatorname{arc}\frac{\alpha}{2}$ ist.

2) Die an den Pendelbogen in seinem tiefsten Punkte gelegte Tangente, welche Wüllner in den früheren Auflagen der Experimentalphysik Schwingungsrichtung nannte, soll im Folgenden der Kürze wegen Schwingungstangente genannt werden.

Nach Wüllner ist B jeder beliebige Punkt auf dem Parallelkreise in der Breite φ, weil bei ihm α = arc AB zwischen 0 und 360^0 liegen kann. Hiernach kann man in Wüllners Sinne fortfahren: „Es muss deshalb aber auch, wenn das Pendel nach einer halben Rotation der Erde — ($\alpha = 180^0$) — im Punkte P angekommen ist, die zweite Richtung, welche die Lage der Pendelebene bestimmt, nämlich die Schwingungstangente PX der ursprünglichen Richtung AC parallel sein.“

Ist aber wirklich PX // AC, so liegen PX und AC in einer Ebene, PX bildet mit PC den $\angle$ CPX = PCA = 2φ, mit der Vertikalen PY, der Verlängerung des Erdradius OP, den $\angle$ XPY = R—2φ und mit dem Erdradius den $<$ XPO = R + 2φ.

Im Punkte P ist also $\beta = 2\varphi$ und nicht $\beta = 180^0 \sin\varphi$. In Worten lauten die mathematischen Formeln:

a) Wenn das schwingende Pendel nach einer halben Rotation der Erde von A nach P gekommen ist, so liegt seine Schwingungstangente nicht horizontal, sondern bildet mit der Horizontalebene den Neigungswinkel 2φ.

b) In der Breite $\varphi = 45^0$ liegt nach einer halben Rotation der Erde die Schwingungstangente auf der Vertikalen zwischen Zenith und Nadir.

3) Da nach Wüllner die Lage des Punktes B auf dem Parallel beliebig und immer die letzte Schwingungstangente des Pendels der ersten parallel sein muss, so muss auch nach einer vollen Rotation der Erde — ($\alpha = 360^0$) — die letzte Schwingungstangente AZ der ersten Schwingungstangente AC parallel sein, d. h. AZ und AC fallen ihrer ganzen Länge nach

zusammen. Aber auch Wüllner behauptet, die letzte Schwingungstangente AZ bilde zu Berlin nach einer vollen Rotation der Erde mit der Meridiantangente AC, in deren Richtung auch die erste Schwingungstangente AC lag, einen $\angle \beta = 285^0 36'$.

4) Ist BD // AC, so ist BD auch der Ebene OAC parallel, also parallel der Ebene des ersten Meridians, d. h. hier desjenigen Meridians, in dem die erste Schwingung erfolgte. Die Entfernung der Geraden BD von dieser Ebene OAC ist $d = MB \sin AMB = r \cos \varphi \sin \alpha$.

Für $\alpha = 2n R$ ist $d = 0$,

für $\alpha = (2n + 1) R$ ist $d = \pm \cos \varphi$.

In Worten: Sind die Schwingungstangenten parallel und müssen sie immer parallel sein, so liegt nach jeder halben Rotation der Erde die Schwingungstangente eines Pendels in der Ebene des ersten Meridians.

5) Nach Wüllner soll die Gerade BD horizontal und zugleich parallel der ersten Schwingungstangente AC sein.

Beides zugleich ist unmöglich.

a) Satz. Ist eine Schwingungstangente BD horizontal, so kann sie der ersten Schwingungstangente AC nicht parallel sein.

Erster Beweis. Die Horizontalebene von B geht durch den Punkt C auf der verlängerten Erdachse. Die erste Schwingungstangente AC liegt ganz in der Ebene des ersten Meridians und durchschneidet die Horizontalebene von B in C. Es kann also in der ganzen Horizontalebene von B keine Gerade der ursprünglichen Schwingungstangente AC parallel sein.

Zweiter Beweis. AC liegt in der Horizontalebene von A, BD in der Horizontalebene von B. Sollen AC und BD parallel sein, so müssen beide der Durchschnittskante VV_1 der beiden Horizontalebenen parallel sein. Die beiden Horizontalebenen haben den Punkt C gemeinschaftlich, also muss VV_1 auch durch C gehen. Daher kann nicht AC // VV_1 sein. Wäre nun die Schwingungstangente BD auch VV_1 parallel, so kann sie doch nicht AC parallel sein.

b) Umkehrung. Ist eine Gerade BD der ersten Schwingungstangente AC parallel, so kann sie nicht in der Horizontalebene von B liegen, also auch keine Schwingungstangente sein.

Beweis. Ist DB // CA, so ist BD auch der Ebene des ersten Meridians parallel. Fälle ich auf diese Ebene das Lot BF und ziehe in der Ebene FG // AC, so ist auch FG // BD und $\angle GFM = CAM = R - \varphi$. Verbinde ich F mit O, so ist $\angle MFO > FAO$, also $\angle MFO > \varphi$, mithin $GFO > R$.

Da FG ⊥ FB, aber nicht FG ⊥ FO, so steht FG nicht senkrecht auf der Ebene FBO; mithin steht auch BD nicht senkrecht auf der Ebene FBO. Weil aber BD ⊥ BF, so kann BD nicht senkrecht auf dem Erdradius OB stehen; denn wäre BD ⊥ BO, so stände ja BD senkrecht auf der Ebene FBO. Kann nun BD nicht senkrecht auf dem Erdradius stehen, so kann BD auch nicht in der Horizontalebene von B liegen. Da aber Schwingungstangenten horizontal liegen müssen, so kann die Gerade BD, welche parallel zu AC gelegt ist, keine Schwingungstangente sein.

Zweiter Beweis. Soll BD eine Schwingungstangente sein, so muss sie wenigstens in der Schwingungsebene des Pendels liegen. Die Schwingungsebene ist aber eine Vertikalebene des Ortes B. Daher muss BD in der Vertikalebene BDO liegen. AC liegt in der Vertikalebene CAO des Ortes A.

Ist nun BD // AC, so müssen beide Geraden der Durchschnittskante ZZ_1 der Vertikalebenen parallel sein. Die Kante ZZ_1 geht aber durch den Mittelpunkt O der Erde, da O den beiden Vertikalebenen gemeinschaftlich ist. Die erste Schwingungstangente steht auf AO senkrecht, daher muss auch $ZZ_1 \perp OA$ sein, weil ZZ_1 // AC. Drehe ich nun die Ebene mit OA um ZZ_1, so beschreibt OA eine Ebene, die senkrecht auf ZZ_1 steht und der Punkt A einen grössten Kreis der Kugel. B liegt nicht auf diesem grössten Kreise, weil ja B ein Ort auf dem durch A gehenden Parallelkreise sein soll. Da nun OB nicht in der Ebene des durch A gehenden grössten Kreises liegt, so steht auch OB nicht senkrecht auf ZZ_1 und ebenso wenig auf BD // ZZ_1. BD ist also keine horizontale Gerade und darum auch keine Schwingungstangente.

Zusatz 1. Dieser letzte Beweis zeigt auch, dass wenn B auf dem durch A gehenden grössten Kreise liegt, die Schwingungstangente BD der ursprünglichen Schwingungstangente parallel sein kann. Wenn A und B auf dem Aequator liegen, so können die Schwingungstangenten AC und BD parallel sein.

Zusatz 2. Bezeichnet man den $\angle$ MFO mit ζ, so ist

$$\operatorname{tg} \zeta = \frac{OM}{FM} = \frac{r \sin \varphi}{r \cos \varphi \cos \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \alpha}$$

FG und FO stehen beide senkrecht auf der Durchschnittskante BF der beiden Ebenen GFBD und OFB; deshalb ist der stumpfe Winkel $GFO = R - \varphi + \zeta = R + (\zeta - \varphi)$ der Kantenwinkel der beiden Ebenen. Ziehe ich von einem Punkte L der Geraden BD das Lot LJ auf die Ebene OBF und verbinde J mit B, so ist, da BD ⊥ BF, auch JB ⊥ BF und

$\angle$ DBJ = R — (ζ — φ). Ziehe ich weiter LK $\perp$ BO und verbinde K mit J, so ist $\angle$ BKI = R und $\angle$ IBK = R — FOB. Daher ist $\cos DBO = -\cos LBK = -\frac{BK.JB}{BL.JB}$

$= -\cos JBK.\cos DBJ$

$= -\sin FBO \sin(\zeta - \varphi)$

$\sin FBO = \frac{OF}{r}$;

$\sin(\zeta - \varphi) = \frac{MO}{OF}\cos\varphi - \frac{MF}{OF}\sin\varphi$

$\sin FBO.\sin(\zeta-\varphi) = \sin\varphi\cos\varphi - \cos\varphi\sin\varphi\cos\alpha$

$= \sin\varphi\cos\varphi(1 - \cos\alpha)$

$= 2\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\alpha$

$\cos DBO = -\sin 2\varphi \sin^2\frac{\alpha}{2}$.

$\angle$ DBO ist der Winkel zwischen dem Erdradius und der Geraden DB, die zur ursprünglichen Schwingungstangente AC durch B gelegt wird.

Z. B. $\alpha = 2R$, $\frac{\alpha}{2} = R$, $\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1$; $\cos DBO = -\sin\varphi$, also $\angle DBO = R + 2\varphi$, wie oben Seite 3.

In der Breite φ bleiben während der Rotation der Erde **die Schwingungstangenten eines schwingenden Pendels nicht parallel.** Denn blieben sie parallel, so könnten sie nicht horizontal liegen, und das müssen sie.

6) Aus dem Gesagten geht hervor, dass die Gründe, welche für den Parallelismus der Schwingungstangenten vorgebracht werden, nichtig sein müssen. Uebrigens erkennt man das auch ohne Weiteres, wenn man den Satz Wüllners: „Denn ein Verlassen dieser Richtung u. s. w.“ genauer ansieht. Erstens ist keine Kraft, die der horizontalen Schwingungstangente parallel ist und deshalb in der Schwingungsebene liegen muss, wenn sie auf den Schwerpunkt des Pendels wirken soll, im stande, das Pendel aus dieser Ebene zu bringen, nicht im stande, die Richtung der Schwingungstangente zu ändern. Zweitens ist ein „Verlassen dieser Richtung“ ganz bestimmt möglich, wenn auf das Pendel eine Kraft einwirkt, die gegen die Schwingungsebene eine geneigte Richtung hat, wobei es ganz gleichgültig ist, ob diese Kraft irgend einer horizontalen Richtung parallel ist oder nicht.

Es findet also gerade das Gegenteil von dem statt, was Wüllner als Beweis für den Parallelismus der Schwingungstangenten vorbringt.

III. Astronomische Geographie von Prof. C. H. E. Martus. Leipzig, 1888. Seite 191, § 15, 157.

Martus behauptet, sich auf Versuche stützend, dasselbe wie Wüllner. Die „Unveränderlichkeit der Schwingungsrichtung" wird aber auch durch seine Versuche nicht dargelegt. Die Versuche an und für sich sind sehr gut, aber sie sind nicht richtig interpretiert.

So weit dem Augenscheine zu trauen ist, wird durch die Versuche von Martus die Unveränderlichkeit der Schwingungsrichtung, d. h. der Schwingungstangente in einem Zimmer, also nur auf einem äusserst kleinen Teile der Erdoberfläche dargelegt. Da ich die Gleichgewichtslagen aller Pendel, die an verschiedenen Stellen in einem grossen Zimmer schwingen, als parallel ansehe, so hege ich nicht den geringsten Zweifel daran, dass es möglich ist, alle Pendel in parallelen Ebenen schwingen zu lassen, und auch nicht den geringsten Zweifel, dass man in einem Zimmer ein schwingendes Pendel von einer Stelle nach einer anderen so fortbewegen kann, dass die Schwingungsebenen parallel bleiben. Weil die Gleichgewichtslagen parallel sind, können auch die Schwingungsebenen parallel sein; sind aber Gleichgewichtslagen und Schwingungsebenen parallel, so müssen die Schwingungstangenten parallel sein. Ich bin aber auch überzeugt, obwohl es meine leiblichen Augen nicht sehen können, dass, wenn man auf dem Parallelkreise in der Breite $\varphi = 52^0 30'$ ein schwingendes Pendel mit der grössten Vorsicht von Berlin bis in die Gegend von Stendal oder Küstrin bringt, seine Gleichgewichtslagen nicht parallel bleiben und deswegen seine Schwingungsebenen nicht parallel sein können. Darum allein ist es mir schon sehr unwahrscheinlich, dass die erste Schwingungstangente zu Berlin den Schwingungstangenten desselben Pendels zu Küstrin oder Stendal parallel sein kann.

Die Versuche von Martus bestätigen nur, dass man die Schwingungstangenten eines Pendels auf einer Strecke AB als parallel ansehen darf, wenn man die Gleichgewichtslagen des Pendels an den Orten A und B als parallel ansieht. Das genügt aber auch, um die Achsendrehung der Erde zu beweisen.

IV. Mach's Grundriss der Physik, bearbeitet von Dr. Ferd. Harbordt und Max Fischer. Leipzig, 1894, Seite 53, § 58.

„Wenn das Pendel aber in der geographischen Breite φ zu Anfang in der Meridianebene schwingt, so wird es seine Schwingungsrichtung wenigstens so viel als möglich beibehalten und deswegen nach einer sehr kleinen Drehung der Erde mit dem Meridian den Winkel einschliessen, den die Meridian-

tangente zwischen beiden Erdstellungen beschrieben hat. Die Summe dieser Winkel für eine volle Erddrehung . . ."

1) Dass die Summe der Winkel, welche die Meridiantangente auf dem Kegelmantel während einer vollen Erddrehung beschreibt, gleich der Kegelecke ist, versteht sich von selbst. Wenn das Pendel seine Schwingungsrichtung so viel als möglich beibehält, so wird es nach einer sehr kleinen Drehung der Erde mit dem Meridian einen Winkel einschliessen, der gleich dem Winkel zwischen den beiden Meridiantangenten ist; man wird auch gern für die sehr kleine Drehung zugeben, dass der Winkel zwischen den beiden Meridiantangenten annähernd dem Teile der Kegelecke gleich ist, welchen die Meridiantangente zwischen den beiden Erdstellungen beschrieben hat.

Die kleine Drehung dauere t Sekunden; nach Verlauf dieser t Sekunden schwingt das Pendel nicht mehr in der Meridianebene. Dauert eine zweite sehr kleine Drehung auch t Sekunden, so beschreibt natürlich in dieser Zeit die Meridiantangente auf dem Kegelmantel einen ebenso grossen Winkel wie während der ersten kleinen Drehung, dagegen ist es wenigstens sehr fraglich, ob nun auch der von der Schwingungstangente beschriebene Winkel gleich dem von der Meridiantangente beschriebenen ist, weil nicht einmal die Annahme, die für die erste kleine Drehung ausdrücklich gemacht wurde, dass nämlich zu Anfang derselben die Schwingungstangente in der Meridianebene liege, für die zweite kleine Drehung festgehalten ist Es ist also gar nicht festgestellt, dass die Schwingungstangente und die Meridiantangente immer während der ganzen Rotation der Erde, und nicht blos während der ersten kleinen Drehung, in gleichen Zeiten gleiche Winkel beschreiben.

Uebrigens wird ein schwingendes Pendel seine Schwingungsrichtung immer und unter allen Umständen wenigstens so viel als möglich beibehalten, ob es zuerst in der Meridianebene schwingt oder nicht.

2) Mach bildet 2 Reihen; die Anzahl der Glieder beider Reihen ist gleich und wird bestimmt durch die Dauer t der kleinen Drehung. In der ersten Reihe sind alle Glieder gleich und die Summe dieser Glieder bekannt. Das erste Glied der zweiten Reihe ist nur annähernd dem ersten Gliede der ersten Reihe gleich; von den übrigen Gliedern der zweiten Reihe ist nichts angegeben. Woraus ergiebt sich denn nun, dass die Summen beider Reihen gleich sind? Und wenn auch die einzelnen Glieder, wie die ersten, in beiden Reihen annähernd gleich wären, so würde sich daraus doch nicht ergeben, dass ihre Summen gleich wären.

V. Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik, 9. Auflage von Leop. Pfaundler. Braunschweig, 1886. 1. Band. S. 325, 73.

„Die Rechnung lehrt, dass der Drehungswinkel dem Sinus der geographischen Breite proportional ist."

Die Richtigkeit dieses Satzes wird nur für eine kurze Rotationsdauer nachgewiesen. „Nach einiger Zeit gelangt der Ort a nach b." Was unter einiger Zeit zu verstehen ist, ergiebt sich aus der Proportion $\alpha : \beta = \mathrm{bo} : \mathrm{bm}$. Denn diese Proportion ist nur so lange richtig, als der Bogen ab zugleich das Mass für α und β sein kann. Ist aber ab der Bogen auf dem Grundkreise eines geraden Kegels, so darf man ihn zwar, so lange a und b dicht zusammenliegen, als das Mass für den $\angle \beta$ betrachten, den die durch a und b gehenden Seitenlinien des Kegels einschliessen, nie aber, wenn a und b weiter auseinanderliegen. So lange oa, ob und der Bogen ab in einer Ebene liegen, so lange also ab als eine Gerade angesehen werden kann, darf man $\alpha : \beta = \mathrm{bo} : \mathrm{bm}$ setzen. Vielleicht würde Archimedes aus Syracus in Anbetracht dessen, dass es hier auf Genauigkeit nicht ankommt, uns am Ende des 19. Jahrhunderts gestatten, einen Bogen von 4^0 als eine Gerade anzusehen. Damit wäre es einem Elementarmathematiker möglich, die Richtigkeit der Proportion $\alpha : \beta = \mathrm{bo} : \mathrm{bm}$ zuzugeben, wenn $\alpha = 4^0$, oder $\alpha < 4^0$ ist. Auf einem Parallelkreise wird der Bogen von 4^0 bei der Rotation der Erde in 16 Minuten zurückgelegt. Daher darf man wohl dem obigen Lehrsatze folgende Fassung geben: Schwingt ein Pendel zuerst in einer Meridianebene, so ist der Drehungswinkel der Pendelebene in den ersten 16 Minuten dem Sinus der g. Br. proportional.

2. „An diesem Resultate würde nichts geändert, wenn die Schwingungsebene in a bereits einen Winkel mit dem Meridian gebildet hätte."

Denn ziehe ich in der als Ebene angenommenen Fläche aob die Geraden bz // av und bw // ao,

$$\text{so ist } \angle \mathrm{obz} = \mathrm{obw} + \mathrm{wbz} = \mathrm{boa} + \mathrm{oav}.$$

Ging in a die Pendelebene durch ao oder av, so geht sie in b durch bw oder bz.

3. Ich lege die congruenten, ebenen Dreiecke aob_1, bob_1, $\mathrm{b}_1\,\mathrm{ob}_2$ der Reihe nach aneinander und ziehe bz // ao, $\mathrm{b}_1\mathrm{z}_1$ // bz, $\mathrm{b}_2\mathrm{z}_2$ // $\mathrm{b}_1\mathrm{z}_1$. Dann ist $\angle\ \mathrm{obz} = \mathrm{aob} = \beta = \alpha \sin \varphi$.

$$\angle\ \mathrm{ob}_1\mathrm{z}_1 = \beta_1 = 2\ \beta = 2\,\alpha \sin \varphi$$

$$\angle\ \mathrm{ob}_2\mathrm{z}_2 = \beta_2 = 3\ \beta = 3\,\alpha \sin \varphi$$

$$\text{und allgemein } \beta \mathrm{n} = \mathrm{n}\beta = \mathrm{n}\alpha \sin \varphi.$$

Es wäre also $\beta = \alpha \sin \varphi$ ganz allgemein richtig, wenn die ebenen Dreiecke aob, bob_1, $b_1\ ob_2$ in einer Ebene lägen; sie sind aber die Seitenflächen einer Pyramide um einen Kegelmantel. Mag man nun auch annehmen, dass eine Anzahl von den um den Kegel liegenden Dreiecken wiederum in eine Ebene fielen, alle wird man sie doch wohl nicht in einer Ebene denken können.

$\beta = \alpha \sin \varphi$ ist unter der ausdrücklichen Annahme gefunden, dass die Rotationsdauer t klein ist; es ist ausserdem nur ein annähernd richtiges Resultat. Wie darf man da fortfahren und sagen: Wie wir sehen, ist es gleichgültig, ob die Zeit kurz oder lang ist, immer ist $\beta = \alpha \sin \varphi$?

Zweiter Teil.

Man sagt kurz: „Der Foucaultsche Pendelversuch beruht auf dem Parallelismus der Pendelschwingungen.“ Die erste Frage also, die beantwortet werden muss, lautet: Worin besteht der Parallelismus der Pendelschwingungen? Diese Frage löst sich in drei andere auf, nämlich:

1) Können auf demselben Parallelkreise die Schwingungsebenen zweier Pendel an den Orten A und B parallel sein?

2) Können auf demselben Parallelkreise an den Orten A und B die Schwingungstangenten zweier Pendel, d. h. die an den untersten Punkt der Pendelbogen gelegten Tangenten parallel sein?

3) Kann auf demselben Parallelkreise die Schwingungstangente eines Pendels im Orte B der Schwingungsebene eines andern Pendels im Orte A parallel sein?

Ad 1. Es ist unmöglich, auf einem Parallelkreise an zwei verschiedenen Orten zwei Pendel so in ebene Schwingungen zu setzen, dass die Schwingungsebenen parallel sind.

Beweis. Die Schwingungsebenen der beiden Pendel sind vertikale Ebenen, die sich in einer durch den Mittelpunkt der Erde gehenden Kante durchschneiden.

Ad 2. Es ist unmöglich, zwei Pendel an zwei Orten, A und B, auf demselben Parallelkreise in der geogr. Breite $\varphi > 0$ so in Schwingung zu setzen, dass ihre Schwingungstangenten parallel werden.

Beweis. Der Mittelpunkt der Erde sei O, der Mittelpunkt des Parallelkreises in der geogr. Breite φ sei M, A und B seien Orte auf dem Parallelkreise und E die Mitte der Sehne AB; der Bogen $AB = \angle AMB$ soll mit α bezeichnet werden; AX und BY sollen die beiden Schwingungstangenten in A und B vorstellen.

Angenommen, es wäre $AX \,//\, BY$.

Da AX und BY in den vertikalen Ebenen OAX und OBY liegen, so müssen sie der Durchschnittskante OG der vertikalen Ebenen parallel sein, also $AX \,//\, BY \,//\, OG$. Da sie aber auch horizontal liegen, so müssen sie auch der Durchschnittskante der Horizontalebenen von A und B parallel sein. Zieht man die Meridiantangenten in A und B, welche die Weltachse in C durchschneiden, so sind CAX und CBY die Horizontalebenen von A und B, deren Durchschnittskante CD man findet, wenn man an den Parallelkreis in A und B Tangenten legt und deren Durchschnittspunkt D mit C verbindet. Also müsste $CD \,//\, AX \,//\, BY \,//\, OG$ sein.

Da $AX \perp AO$ und $BY \perp BO$, so ist $OG \perp OA$ und OB oder $OG \perp \triangle OAB$.

Wenn $CD \,//\, OG$ wäre, so müsste auch $CD \perp \triangle OAB$ sein.

$OA = OB = r, \quad \angle ACO = \varphi, \quad CA = CB = r \operatorname{ctg} \varphi,$

$CM = r \operatorname{ctg} \varphi \cos \varphi, \quad OM = r \sin \varphi, \quad OC = \frac{r}{\sin \varphi}.$

$\angle AMB = \alpha, \quad MA = MB = r \cos \varphi, \quad AB = 2r \cos \varphi \sin \frac{\alpha}{2},$

$MD = \frac{r \cos \varphi}{\cos \frac{\alpha}{2}}, \; BD = r \cos \varphi \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \; ME = r \cos \varphi \cos \frac{\alpha}{2}.$

$$OE^2 = MO^2 + ME^2 = r^2 \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$= r^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} + \cos^2 \varphi\right)$$

$$= r^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \left(\sin^2 \varphi \operatorname{sc}^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \varphi\right)$$

$$= r^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 + \sin^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}\right).$$

$$OE = r \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{1 + \sin^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

$$CD^2 = CM^2 + MD^2 = r^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi \cos^2 \varphi + \frac{r^2 \cos^2}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$= r^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi \left(\cos^2 \varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$= r^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi \left(1 + \sin^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}\right).$$

$$CD = r \operatorname{ctg} \varphi \sqrt{1 + \sin^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Oder $CD^2 = CB^2 + BD^2 = r^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi + r^2 \cos^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$

$$= r^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi \left(1 + \sin^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}\right).$$

Das Volumen der Pyramide CAOB ist

$$V = \frac{\triangle AMB . CO}{3} = \frac{r^3 \cos^2 \varphi \sin \alpha}{6 \sin \varphi}.$$

Das $\triangle AOB = \frac{AB . OE}{2} = r^2 \cos \varphi \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{1 + \sin^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$

$$\triangle AOB = \frac{1}{2} r^2 \cos \varphi \sin \alpha \sqrt{1 + \sin^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Daher ist die von C auf das $\triangle$ AOB gefällte Höhe CF der Pyramide COAB:

$$CF = \frac{3 V}{\triangle AOB} = \frac{r^3 \cos^2 \varphi \sin \alpha}{r^2 \sin \varphi \cos \varphi \sin \alpha \sqrt{1 + \sin^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}}$$

$$= \frac{r \operatorname{ctg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \varphi}}.$$

CF steht also wirklich senkrecht auf dem $\triangle$ AOB; sollte nun auch CD$\perp\triangle$ AOB sein, so müsste auch

$$CD = r \operatorname{ctg} \varphi \sqrt{1 + \sin^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$= CF = \frac{r \operatorname{ctg} \varphi}{\sqrt{1 + \sin^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}}$$

oder $\sqrt{1 + \sin^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}}$

oder $1 + \sin^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = 1$,

mithin $\sin \alpha\, \varphi \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 0$ sein.

Die beiden Schwingungstangenten AX und BY können also nur parallel sein, wenn $\sin \varphi \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 0$ ist.

Ist $\varphi = 0$, so ist auch $\sin\varphi \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 0$. Auf dem Aequator können an zwei verschiedenen Orten A und B die Schwingungstangenten zweier schwingenden Pendel parallel sein.

Ist $\frac{\alpha}{2} = 2\,R$, so ist ebenfalls $\sin\varphi \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 0$, $\alpha = 4\,R$, d. h. auf irgend einem Parallelkreise können an zwei verschiedenen Orten zwei Pendel nie und nimmer so schwingen, dass ihre Schwingungstangenten parallel werden; wenn aber ein Pendel in A in Schwingungen gesetzt wird und das Pendel während der ganzen Rotation der Erde weiter schwingt, so ist es möglich, dass nach einer vollen Umdrehung die letzte Tangente mit der ersten zusammenfällt.

Ad 3. Es ist möglich, dass auf demselben Parallelkreise die Schwingungstangente BY eines Pendels in B parallel der Schwingungsebene eines anderen Pendels an einem Orte A ist.

a) Erster Beweis. Um die Höhe CF der Pyramide CABO zu construieren, ziehe ich OE ⊥ AB und fälle von C das Lot CF auf OE; darum liegt CF in der Ebene CEO oder CDO. Diese Ebene durchschneidet den Parallelkreis in A, und nun soll der Bogen A_1B mit α bezeichnet werden.

Durch den Punkt B des Parallelkreises ziehe ich eine Parallele BY zu CF; BY ist also erstens parallel der Ebene CA_1O und zweitens senkrecht auf dem $\triangle A_1OB$, mithin auch senkrecht auf OB, oder BY liegt horizontal. Natürlich kann man durch die Horizontale BY eine vertikale Ebene legen; BY kann also eine Schwingungstangente in B sein; CA_1O kann die Schwingungsebene eines in A_1 schwingenden Pendels sein. Mithin ist es in der That möglich, dass die Schwingungstangente eines Pendels in B parallel der Schwingungsebene eines Pendels in A ist.

Da nun BY // CF ist, so ist $\angle$ FCB = CBY. $\angle$ CBY $= \beta$ wird gebildet von der Meridiantangente und der Schwingungstangente in B. Da $\angle A_1MB = \alpha$ gesetzt worden ist, so ist

$$CF = \frac{r \operatorname{ctg}\varphi}{\sqrt{1 + \sin^2\varphi \operatorname{tg}^2\alpha}};$$

$$\cos FCB = \cos\beta = \frac{CF}{CB} = \frac{CF}{r \operatorname{ctg}\varphi}$$

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2\varphi \operatorname{tg} 2\,\alpha}}$$

und $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha \sin\varphi$.

Unter der Voraussetzung, dass die Schwingungstangente in B der Schwingungsebene in A parallel ist, ist der Winkel

β zwischen der Schwingungstangente und der Meridiantangente in B gegeben durch die Formel: $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \sin \varphi$.

c) Dasselbe Resultat erhält man auch auf folgende Weise:

Auf einem Meridian ist in der geographischen Breite φ ein Pendel freibeweglich aufgehängt. In dem Momente, wo der Meridian und das Pendel durch den Punkt A gehen, wird das Pendel in der Ebene des Meridians in Schwingungen gesetzt, so dass also die erste Schwingungsebene mit der Meridianebene und die erste Schwingungstangente mit der Meridiantangente oder Mittagslinie in A, welche die Weltachse in C durchschneidet, zusammenfallen. In einer Figur soll der Mittelpunkt O der Erde, die Weltachse NS, der Punkt A, die erste Schwingungstangente und die Meridiantangente AC in der Ebene der Zeichnung, in der Ebene des Papiers liegen; diese Ebene stellt also auch die erste Schwingungsebene vor.

Bei der Rotation der Erde kommt das Pendel nach einer gewissen Zeit, nach t Stunden, zu dem Punkte B; es hat dann den Bogen AB auf einem Parallelkreise beschrieben, dessen Mittelpunkt M auf der Weltachse liegt. $\text{arc}\, AB = \angle AMB = \alpha = 15^{0} t$.

Wenn das Pendel in B noch schwingt, so steht unumstösslich fest, dass seine Schwingungstangente in B senkrecht auf dem Erdradius OB steht, dass sie also in der Horizontalebene von B liegt. Darin liegt aber auch die Meridiantangente BC. Die Horizontalebene von B durchschneidet also die erste Schwingungsebene, die durch A und die Erdachse festgelegt ist, in C und in einer Kante CZ. Je nachdem $\alpha \lesseqgtr R$, liegt CZ mit der ersten Schwingungstangente AC auf derselben Seite der Weltachse NS oder nicht; ist $\alpha = R$, so steht CZ senkrecht auf der Weltachse.

Da nun die Horizontalebene BCZ von der ersten Schwingungstangente AC in C durchschnitten wird, so kann in der Horizontalebene gar keine Gerade liegen, die der ersten Schwingungstangente parallel wäre. Absolut unmöglich ist es daher, dass die Schwingungstangente in B der Schwingungstangente in A parallel ist; absolut unmöglich also auch der Beweis für die Behauptung, „dass“ nämlich „die horizontale Richtung, d. h. die an den tiefsten Punkt des Pendelbogens gelegte horizontale Tangente immer dieselbe Richtung beibehalten muss.“

Durch den Punkt B kann man in der Horizontalebene BCZ nur eine einzige Parallele zur Durchschnittskante CZ und zur ersten Schwingungsebene ACS legen.

Wenn also überhaupt von dem behaupteten Parallelismus der Pendelschwingungen in A und B etwas bleiben soll, so kann nur die Schwingungstangente BY in B parallel der ersten Schwingungsebene ACS sein.

Angenommen, das sei der Fall.

C (S,A,Z) ist eine dreiseitige körperliche Ecke mit der Seite BCS $= \varphi$, dem Kantenwinkel α an SC und dem Kantenwinkel R an CB; die Seite BCZ sei β.

Das dieser Ecke entsprechende sphärische Dreieck liefert sofort die Formel $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \sin \varphi$.

Da nun $\beta = ZCB = CBY$, so ist β auch der Winkel zwischen der Meridian- und der Schwingungstangente in B.

c) Auch nach physikalischen Prinzipien ist es nur möglich, dass die Schwingungstangenten des Pendels während der Rotation der Erde um ihre Achse der ersten Schwingungsebene parallel sind und bleiben.

Bei einer Reihe von Problemen, welche die elementare Physik behandelt, gilt der Grundsatz: Treten während der Bewegung eines Körpers Kräfte auf, welche die erste Bewegung ändern müssen, so ändern sie nur das an der Bewegung, was unter ihrer Einwirkung nicht ungeändert bleiben kann; kann eine Componente der ersten Bewegung nach Richtung und Grösse oder bloss nach der Richtung oder bloss nach der Grösse ungeändert in die zweite Bewegung eintreten, so thut sie es auch. Logisch ist es auch zu denken, dass das Wesentliche, das Charakteristische einer Arbeit, die eine Bewegung einleitet, vor allem bei der weitern Bewegung erhalten bleibt. Das Wesentliche der Arbeit, die ein Pendel in ebene Schwingungen setzt, ist nur dies, dass ihre Richtung in einer ganz bestimmten Vertikalebene liegt; ihre Grösse und besonders ihre Richtung in dieser Vertikalebene selbst sind ganz gleichgültig, insofern davon die Richtung oder die Lage der Schwingungstangente in jener Vertikalebene ganz unabhängig ist. Nicht meine Arbeit, sondern einzig und allein die Schwerkraft legt die Tangente horizontal. Schon bei der ersten Schwingung bleibt von meiner Arbeit nur das Wesentliche, und das besteht darin, dass sie das Pendel so in ebene Schwingungen versetzt, dass die Schwingungstangente mit einer genau bestimmten Vertikalebene den Winkel Null bildet. Bleibt nun das Wesentliche der Arbeit erhalten, — alles übrige ist schon bei der ersten Schwingung verloren gegangen, — so muss dieser Theil der Arbeit bei der weiteren Bewegung des Pendels jede der folgenden Schwingungstangenten so legen, dass sie mit eben derselben Vertikalebene ebenfalls den Winkel Null bilden. Und sollte dies aus irgend

welchen Gründen nicht der Fall sein, so kann jedenfalls die Arbeit nicht noch mehr leisten.

d) Es wird behauptet, dass die unter falschen Gesichtspunkten abgeleitete Formel $\beta = \alpha \sin \varphi$ mit der Beobachtung für jedes α, β, φ übereinstimme. Ist dies der Fall, so bleibt von dem behaupteten Parallelismus der Pendelschwingungen nichts übrig. Indess habe ich in keinem Buche eine Beobachtung mitgeteilt gefunden, die mich nötigen könnte, an die Uebereinstimmung von $\beta = \alpha \sin \varphi$ mit Beobachtungen zu glauben, wenn die Schwingungsdauer eines Pendels über eine Stunde hinausgeht. Vollends für ein Märchen halte ich die Angabe: „In 24 Stunden dreht sich somit in Berlin, da $\alpha = 360^0$ ist, die Pendelebene um $285^0 36'$ oder zu einer ganzen Umdrehung braucht das Pendel 30 Stunden und 15 Minuten.

Martus giebt die stündliche Ablenkung in Berlin zu $11,^0 94$, an einer andern Stelle zu 12^0 an, die Formel

$\beta = \alpha \sin \varphi$ ergiebt $\beta = 11^0,90$,

$\text{tg}\, \beta = \text{tg}\, \alpha \sin \varphi$ „ $\beta = 12,^0 003$.

Auch die 6 Beobachtungen, welche Martus in der zweiten Auflage seiner astronomischen Geographie mitteilt, stimmen natürlicherweise, da die Beobachtungszeit nicht viel über eine Stunde hinausgeht, fast ebenso gut zu der Formel $\beta = \alpha \sin \varphi$ als zu $\text{tg}\, \beta = \text{tg}\, \alpha \sin \varphi$, weil $\text{arc}\, 15^0 = 0,26180$ und $\text{tg}\ 15^0 = 0,26795$ ist.

Ob in der That die Schwingungstangente stets der ersten Schwingungsebene parallel ist, kann der Besitzer eines richtig gehenden Foucaultschen Pendels in sehr kurzer Zeit nachweisen. Wäre dies nämlich der Fall, so wäre auch die Formel $\text{tg}\, \beta = \text{tg}\, \alpha \sin \varphi$ allgemein richtig. Er setzt deshalb sein Pendel so in ebene Schwingungen, dass die Schwingungstangente mit der Mittagslinie einen Winkel $\beta = 45^0$ bildet. Da $\text{tg}\, 45^0 = 1$, so ist dann $\text{ctg}\, \alpha = \sin \varphi$.

Für Berlin $\varphi = 52^0,52$ ergiebt sich $\alpha = 51^0,574$. Nach 30 Minuten ist $\alpha_1 = 59^0,074$ und $\beta_1 = 52^0,847$. Der Zuwachs zum ursprünglichen $\angle \beta = 45^0$ würde also nach einer halben Stunde fast 8^0 betragen und dürfte leicht genug zu messen sein.

Schluss.

Mag der Versuch ausfallen, wie er will, für die Hauptsache, nämlich mit dem Pendel die Achsendrehung der Erde nachzuweisen, ist er wie die Formeln $\beta = \alpha \sin \varphi$ und $\text{tg}\, \beta = \text{tg}\, \alpha \sin \varphi$ von keiner Bedeutung.

Einen Bogen von 3^0 kann man als eine Gerade ansehen. An die Punkte A und B, die auf einem Parallelkreise 3^0 von einander entfernt sind, lege ich Meridiantangenten, welche die Erdachse in C durchschneiden, und durch die 3 Punkte A, B und C eine Ebene; dieselbe fällt annähernd mit den Horizontalebenen von A und B zusammen. AC soll die Y-Achse, AB die X-Achse, A der Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems sein.

1) Angenommen, die Erde stehe still und ein möglichst langes Fadenpendel schwinge so, dass sein Schwerpunkt sich in der Gleichgewichtslage in A befinde, während der Schwingung aber sich stets auf der Y-Achse befinde, dann ist es nicht schwer, für jeden Zeitmoment den Ort zu bestimmen, in dem sich der Schwerpunkt des Pendels befindet. — Das Pendel soll möglichst lang sein, damit sein Schwingungsbogen als eine Gerade angesehen werden kann.

2) Angenommen, das Pendel befinde sich scheinbar in Ruhe und die Erde rotiere; dann bewegt sich der Schwerpunkt des Pendels auf AB hin und legt in gleichen Zeiten gleiche Strecken zurück, wenn die Erde mit constanter Geschwindigkeit rotiert.

Wenn nun 3) die Erde rotiert und zugleich das Pendel schwingt, so befindet sich bei diesen beiden Bewegungen der Schwerpunkt des Pendels stets in der Ebene ABC und beschreibt in dieser Ebene eine wellenförmige Kurve, deren aufeinanderfolgenden Berge und Thäler abnehmen, weil die Amplitüde kleiner wird. Hat man die Abnahme der Amplitüde festgestellt, so liegt auch keine Schwierigkeit mehr vor, für die Curve eine Gleichung aufzustellen.

Wir haben es also hier nur mit geraden Linien und Ebenen zu thun und dürfen deshalb ohne weiteres auch den Satz vom Parallelogramm der Kräfte oder Bewegungen anwenden, wie ihn die elementare Physik liefert. Stände danach, wenn das Pendel während der Rotation der Erde von A nach B gekommen ist, die Erde still, so würde seine Schwingungstangente in B wieder der in A parallel sein.

Ist $AY \perp AB$, so ist auch die Schwingungstangente BZ in B senkrecht auf AB. In der Ebene ABC sei $AB = 3^0$ der Bogen des Parallelkreises in der geogr. Breite $53,^05$; er hat also die Länge 333 cos $53,^05$ km. Der zu AB parallele Bogen DE in der Breite $54,^05$, der in der Ebene ABC auch durch eine Gerade dargestellt wird, hat die Länge 333 cos $54,^05$ km.

BE stellt in derselben Ebene den durch B u. E gehenden Meridian vor. Dieser bildet mit der Schwingungstangente BZ

den $\angle$ EBZ $= \alpha$. Die verlängerte DE durchschneidet BZ in F, und es ist nun entweder

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{EF}{FB}$$

$$\text{oder} \sin \alpha = \frac{EF}{EB}$$

BF oder BE sehe ich als die Länge eines Grades von 111 km an. Danach erhalte ich für den Winkel zwischen Meridian und Schwingungstangente in B nach 12 Minuten

$$\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha = 3 \; (\cos 53^0{,}5 - 54^0{,}5) = 6 \sin 54^0 \sin 30'$$

$$\log \sin \alpha = \log \operatorname{tg} \alpha = 8{,}62695.$$

$$\text{und } \alpha = 2^0{,}43.$$

In Graudenz dreht sich also die Schwingungstangente eines Pendels in 12 Minuten scheinbar um $2^0{,}43$.